PD Emanuel Scheidegger
B. Sc. Thomas Spittler
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie II
WS 17/18

Übungsblatt 13

Modulformen mit Charakter

49. Konstruktion von Spitzenformen für $\Gamma(N)$.

    (4 Punkte) Es seien $N \in \{2, 3, 4, 6, 12\}$ und $k = \frac{12}{N}$. Zeigen Sie, dass $S_k(\Gamma(N)) = \mathbb{C} \cdot \Delta(N\tau)^{\frac{1}{N}}$.

50. Modulformen mit Charakter.

    Zeigen Sie, dass gilt:

    (a) (2 Punkte) $(\eta(\tau)\eta(7\tau))^3 \in S_3(\Gamma_0(7), \chi)$, wobei $\chi(n) = \left(\frac{n}{7}\right)$.

    (b) (2 Punkte) $S_3(\Gamma_0(8), \chi) = \mathbb{C}\eta(\tau)^2\eta(2\tau)\eta(4\tau)\eta(8\tau)^2$, wobei $\chi(n) = \left(\frac{2}{n}\right)(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$.

51. Modulfunktionen für $\Gamma(N)$

    Es seien $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in \mathbb{Z}_N^2$, $\bar{v} \neq (0, 0)$ und $f_0^{\bar{v}}(\tau) = \frac{g_2(\tau)}{g_3(\tau)} \wp\left(\frac{\bar{v}_1\tau + \bar{v}_2}{N}\right)$.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $f_0^{\bar{v}}$ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{H}$ ist.

    (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $f_0^{\bar{v}}|_0\gamma = f_0^{\overline{v\gamma}}$ für alle $\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ gilt.

    (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $f_0^{\bar{v}}$ meromorph in $i\infty$ ist. Zeigen Sie dazu, daß gilt:

    $$\lim_{\operatorname{Im}\tau\to\infty} \wp\left(\frac{\bar{v}_1\tau + \bar{v}_2}{N}\right) = \begin{cases} -2\zeta(2) & \bar{v}_1 \neq \bar{0} \\ -2\zeta(2) + N^2 \sum_{n\equiv\bar{v}_2 \bmod N} \frac{1}{n^2} & \bar{v}_1 = \bar{0} \end{cases}$$

    (d) (1 Punkt) Schliessen Sie, daß $f_0^{\bar{v}} \in A_0(\Gamma(N))$, indem Sie das Verhalten an den übrigen Spitzen diskutieren.

52. Fricke–Involution.

    Es seien χ ein Dirichlet–Charakter modulo N, $f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ und $\alpha_N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $f|_k\alpha_N \in M_k(\Gamma_0(N), \bar{\chi})$. Wir definieren die Abbildung $W_{N,k} : M_k(\Gamma_0(N), \chi) \to M_k(\Gamma_0(N), \bar{\chi}), f \mapsto f|_k\alpha_N$. Zeigen Sie, dass $W_{N,k}$ ein Isomorphismus ist, und dass gilt: $W_{N,k} \circ W_{N,k} = (-1)^k \mathrm{id}_{M_k(\Gamma_0(N),\chi)}$.

(b) (1 Punkt) Es sei nun $\chi = \bar{\chi}$, d.h. $\chi \in \{\pm 1\}$. Wir setzen $M_k^{\pm}(\Gamma_0(N), \chi) = \{f \in M_k(\Gamma_0(N), \chi) \mid W_N f = \pm i^{-k} f\}$. Zeigen Sie, daß gilt: $M_k(\Gamma_0(N), \chi) \cong M_k^{+}(\Gamma_0(N), \chi) \oplus M_k^{-}(\Gamma_0(N), \chi)$.

(c) (1 Punkt) Es sei nun $N = 4$ und $k = 2$. Drücken Sie $W_{4,2}$ in der Basis (F_2, G_2) von $M_2(\Gamma_0(4), 1_4) = M_2(\Gamma_0(4))$ aus (cf. Aufgabe 47(d)). Zeigen Sie, daß $\dim M_2^{\pm}(\Gamma_0(4)) = 1$. Bestimmen Sie eine Basis von Eigenformen für $W_{4,2}$, in dem Sie die Fourier–Reihenentwicklung $\sum_{n \geq 0} a_n q^n$ durch $a_1 = 1$ festlegen.

Abgabetermin: Dienstag, 6. 2. 2018 um 10:00 Uhr.